TEMA 4: ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

1. ECUACIONES.

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Las variables en este caso se denominan incógnitas.
Las soluciones de una ecuación son los valores que pueden tomar las incógnitas de manera que, al sustituirlas en la ecuación, la igualdad sea cierta. Una ecuación puede tener una, varias o infinitas soluciones.
Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen exactamente las mismas soluciones.
Regla de la suma: Si se suma o resta un mismo número a los dos miembros de una ecuación, se obtiene otra ecuación equivalente.
Regla del producto: Si se multiplican o dividen por un mismo nº distinto de cero los dos miembros de puna ecuación, se obtiene otra ecuación equivalente.

2. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

Para resolver una ecuación de primer grado se siguen los pasos siguientes:

1º Se eliminan los denominadores.
2º Se eliminan los paréntesis.
3º Se agrupan los términos.
4º Se opera y se halla la solución.

ACTIVIDADES

1. Resuelve la siguiente ecuación:

$$2(x-3)+\frac{x-1}{2}-\frac{2x-3}{4}=-\frac{9}{4}$$

3. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Las soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ son de la forma:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Las ecuaciones de segundo grado incompletas pueden resolverse por métodos más sencillos:
- Las ecuaciones del tipo $ax^2+bx=0$ se resuelven extrayendo factor común.
- Las ecuaciones del tipo $ax^2+c=0$ se resuelven despejando la incógnita directamente.

ACTIVIDADES

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4x^2+x-39=0$
b) $-2x^2+3x+2=0$
c) $2x^2-12x=0$
d) $4x^2-16=0$
e) $2(3x-2)+x(x-1)=-4$
f) $\frac{x^2+1}{2}-\frac{2x-3}{4}+\frac{x^2}{6}=\frac{59}{2}$

4. ECUACIONES POLINÓMICAS DE GRADO SUPERIOR A DOS

- Las **ecuaciones bicuadradas** son ecuaciones de cuarto grado pero tienen una característica que las hace especiales: no tienen términos de grado impar, es decir son de la forma $ax^4+bx^2+c=0$, se resuelven transformándolas en ecuaciones de segundo grado mediante el **cambio de variable** $z=x^2$
- Si en una ecuación de la forma P(x)=0, el polinomio P(x) tiene alguna **raíz entera**, se puede hallar mediante la regla de **Ruffini** y factorizar el polinomio hasta obtener una ecuación de segundo grado.

ACTIVIDADES

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a) $4x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

   b) $6x^5 - x^4 - 19x^3 - 9x^2 + 5x + 2 = 0$

5. ECUACIONES RACIONALES

Para resolver las ecuaciones racionales se eliminan los denominadores multiplicando por el mínimo común múltiplo de estos y se resuelve la ecuación polinómica obtenida. Por último hay que comprobar las soluciones en la ecuación original.

ACTIVIDADES

1. Resuelve:

   a) $\frac{x+1}{2x-1} + \frac{x}{2x+1} = \frac{7}{4x^2-1}$

   b) $\frac{x^2+x-2}{x-1} = \frac{2-3x^2}{x+1}$

6. ECUACIONES CON RADICALES

Las ecuaciones con radicales también se denominan irracionales. Se resuelven aislando de forma sucesiva cada radical y elevando al índice de este.
Si se trata de raíces de índice par hay que tener en cuenta que se pueden obtener soluciones falsas, por lo que es imprescindible comprobar si las soluciones obtenidas son correctas.

ACTIVIDADES

1. Resuelve las ecuaciones:

a) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}=5$ b) $\sqrt{2x+4}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x-5}$

7. ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones exponenciales son las que tienen la incógnita en el exponente. Para sacarlo de allí hay que expresar lado y lado del igual con una potencia de la misma base y si esto no se puede hacer entonces se recurre a los logaritmos, aun así hay algunas que no se pueden resolver analíticamente.

Ejemplos

$$5^{6-x^2}=\frac{1}{125}$$

$$7^{2x^2-x-15}=1$$

$$5^{6-x^2}=3$$

$$-4\cdot 3^{x+1}+3^{2x}=-27$$

Ecuaciones logarítmicas

Son las que tienen la x dentro de un logaritmo. Para resolverlas uno debe coger las propiedades de los logaritmos y utilizarlas para resolver la ecuación, muchas veces (aunque no veremos ninguna) no se pueden resolver analíticamente. Hay que comprobar la ecuación inicial

$$\log_a x = y \rightarrow a^y = x \qquad a>0 \ \ y \ \ a\neq 1$$

Propiedades de los logaritmos

1. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y \qquad \log_2(4\cdot 8)=\log_2 4+\log_2 8=2+3=5$$

2. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y \qquad \log_2\left(\frac{8}{4}\right)=\log_2 8-\log_2 4=3-2=1$$

3. El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

$$\log_a(x^n) = n\log_a x \qquad \log_2(8^4) = 4\log_2 8 = 4\cdot 3 = 12$$

Ejemplos

$\log 2x + \log 5 = 2$

$4\log_3(x+5) = \log_3 81$

$2\log x = \log(x+2)$

7. SISTEMAS DE ECUACIONES. SOLUCIONES

Cuando se tienen n incógnitas ligadas por m ecuaciones que deben cumplirse simultáneamente, se tiene un sistema de m ecuaciones con n incógnitas.

Si todas las ecuaciones son polinómicas de primer grado se dice que el sistema es lineal.

Dado un sistema con n incógnitas, una solución es un conjunto de n valores, uno para cada una de las incógnitas, tales que sustituidos en las ecuaciones hacen que estas se verifiquen.

8. SISTEMAS DE DOS ECUACIONES

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se pueden utilizar, entre otros, los métodos de sustitución y reducción.

El método de sustitución consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación, consiguiéndose una ecuación con una sola incógnita, que se resuelve.

El método de reducción consiste en multiplicar las ecuaciones por los números adecuados para que el coeficiente de una de las incógnitas sea el mismo en las dos ecuaciones. Así esta incógnita puede eliminarse al restar las dos ecuaciones, obteniéndose una ecuación con una sola incógnita.

ACTIVIDADES

1. Resuelve por sustitución

$$\begin{cases} 2x + 3y = -6 \\ 5x - y = 19 \end{cases}$$

2. Resuelve por reducción

$$\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$$

3. Resuelve los siguientes sistemas

$$\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ x^2 - 2xy = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6 \\ 3x^2 - y^2 = 11 \end{cases}$$

9. SISTEMAS DE TRES ECUACIONES LINEALES. MÉTODO DE GAUSS

El método de Gauss consiste en convertir un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas en un sistema con una 1ª ecuación de tres incógnitas, una 2ª ecuación de dos incógnitas y, por último una 3ª ecuación de solo una incógnita. Por lo que se reduce sustancialmente la dificultad del problema.

Ejemplo
$$\begin{cases} 2x + 3y - 7z = -1 \\ 3x + 4y - 6z = 5 \\ 5x - 2y + 4z = -7 \end{cases}$$

En un primer paso, la primera ecuación se deja siempre igual, mientras que en las otras ecuaciones eliminamos el término de la x usando el método de la reducción con la primera ecuación.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7z = -1 \\ -y + 9z = 13 \\ -19y + 43z = -9 \end{cases}$$

Ahora no cambiaremos ni la 1ª ecuación ni la 2ª ecuación y anularemos el término y de la 3ª ecuación usando la reducción con la 2ª ecuación.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7z = -1 \\ -y + 9z = 13 \\ -128z = -256 \end{cases}$$

Ahora la resolución del sistema se convierte en una trivialidad. De la 3ª ecuación obtenemos z=2, que introducimos en la 2ª ecuación para hallar y=5, y por último introducimos z e y en la 1ª ecuación para hallar x=-1.

ACTIVIDADES

1. Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ -x + y - z = -2 \end{cases}$$

PROBLEMAS

1. Un padre dice a su hijo: hoy mi edad es el cuádruple que la tuya, pero dentro de 18 años será sólo el doble. ¿Cuántos años tienen cada uno?
2. La suma de dos números impares consecutivos es 28. Hallarlos.
3. En una fracción el denominador es 5 unidades mayor que el numerador. Si se suman 35 unidades al numerador el valor de la fracción será igual a la inversa de la fracción primitiva. ¿Cuál es ésta?
4. Hallar dos números positivos cuya diferencia sea 2 y su producto 8.
5. Una madre reparte entre sus hijos 36 caramelos en partes iguales. Si fuesen 3 hijos menos, recibiría cada uno 2 caramelos más. ¿Cuántos son los hijos?
6. Divide 20 en dos partes tales que la suma de sus cuadrados sea 202.
7. Hallar dos números tales que su suma sea 77 y que al dividir el mayor por el menor, dé 3 de cociente y 5 de resto.
8. Hallar una fracción que resulte equivalente a 1/4 si se añade una unidad al numerador, y equivalente a 1/5 si se añade una unidad al denominador.
9. Tres ciudades A, B y C, están dispuestas en los vértices de un triángulo. Si se va de A a B pasando por C, se recorren 27 km. Si se va de B a C, pasando por A, 35 km. Y de A a C pasando por B, 32 km. Hallar la distancia entre cada dos ciudades.
10. A las 17.30 horas, desde la ciudad A sale un ciclista con una velocidad constante de 25 km/h, hacia otra ciudad B, que dista de la primera 55 km. Media hora antes, de la ciudad B había partido otro ciclista, con una velocidad constante de 20 km/h, con dirección a la ciudad A. Calcular cuándo y dónde se cruzarán los dos ciclistas.
11. Determinar el número natural de tres cifras que cumpla las tres condiciones siguientes:
    - La cifra de las centenas es el doble de la cifra de las decenas.
    - Si se invierte el orden de las cifras de las unidades y las decenas, el número que resulta es 36 unidades mayor.
    - Si se invierte el orden de las cifras de las unidades y de las centenas, el número que resulta es 99 unidades mayor.
12. En un corral hay gallinas y conejos, contándose en total 41 cabezas y 118 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?
13. La edad de una madre es, en la actualidad, el triple que la de su hijo. La suma de las edades del padre, de la madre y del hijo es 80 años y dentro de 5 años, la edad del padre será 5 años menor que la suma de las edades de la madre y del hijo. ¿Cuáles son las edades, en la actualidad?
14. La suma de las tres cifras de un número es 18, siendo el doble de la cifra de las decenas igual a la suma de las otras dos. Si se cambia la cifra de las unidades por la de las centenas, el número aumenta en 198 unidades. ¿De qué número se trata?
15. Una granja tiene 56 animales entre cerdos, gallinas y patos. El total de patas es de 158 y el de picos 33. ¿Cuántos animales de cada tipo hay?
16. Una tienda de música ha obtenido 2468,75€ por la venta de 224 discos compactos de música clásica, rock y flamenco. Sabiendo que el CD clásico cuesta 12,50€, que los otros dos son un 10 % y un 20% más baratos que aquel, respectivamente, y que la suma de CDs de rock y flamenco son el triple que los de clásica, halla el número de discos vendidos de cada tipo.
17. Sumando los años de antigüedad de tres empleados A, B y C se obtiene 50 años. El doble de la suma de las antigüedades de B y de C es igual al triple de la antigüedad de A. La diferencia de antigüedad entre B y C es igual al 30 % de la antigüedad de A. Determina los años de antigüedad de cada empleado.